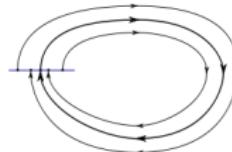


Alguns treballs sobre Equacions diferencials discontínues

R. Prohens



Universitat
de les Illes Balears



Grup de SSDD de la UIB

UIB, 8 de novembre de 2019

Aquests són treballs conjunts amb:
Armengol Gasull (UAB) i Bartomeu Coll (UIB)

Segon títol:

Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides

B. Coll, A. Gasull i R. Prohens:

-  "First Lyapunov constants for non-smooth Liénard differential equations". Proceed. 2nd Catalan days on Appl. Math. (1995).
-  "Limit cycles for non-smooth differential equations via Schwarzian derivative". JDE (1996).
-  "The center problem for discontinuous Liénard differential equation". IJBC (1999).
-  "Center-focus and isochronous center problems for discontinuous differential equations". DCDS (2000).
-  "Degenerate Hopf bifurcations in discontinuous planar systems". JMAA (2001).
-  "Simple non-autonomous differential equations with many limit cycles". CANA (2008).

Sobre les Equacions Diferencials Discontínues

Com hi varem arribar?

Òrbites periòdiques al pla per a camps vectorials polinomials a trossos

- ▶ “First Lyapunov constants for non-smooth Liénard differential equations” Proceedings of the 2nd Catalan days on Applied Mathematics (1995).

Objectiu: estudi de l'origen i del problema centre-focus per a equacions de Liénard discontínues (no diferenciables)

$$(\dot{x}, \dot{y}) = \begin{cases} (-y + \sum_{i \geq 2}^n a_i x^i, x) & \text{si } y \geq 0, \\ (-y + \sum_{i \geq 2}^n b_i x^i, x) & \text{si } y \leq 0. \end{cases}$$

Resultat principal

Les primeres constants de Lyapunov són:

$$V_1 = V_2 = 0, \quad V_5 = \frac{5\pi}{16}(a_5 + b_5),$$

$$V_3 = \frac{3\pi}{8}(a_3 + b_3), \quad V_6 = \frac{26}{21}a_5(a_2 + b_2) + \frac{58}{525}a_3(a_4 + b_4),$$

$$V_4 = \frac{14}{15}a_3(a_2 + b_2), \quad V_7 = \frac{35\pi}{128}(a_7 + b_7).$$

- ▶ “First Lyapunov constants for non-smooth Liénard differential equations” Proceedings of the 2nd Catalan days on Applied Mathematics (1995).

Objectiu: estudi de l'origen i del problema centre-focus per a equacions de Liénard discontínues (no diferenciables)

$$(\dot{x}, \dot{y}) = \begin{cases} (-y + \sum_{i \geq 2}^n a_i x^i, x) & \text{si } y \geq 0, \\ (-y + \sum_{i \geq 2}^n b_i x^i, x) & \text{si } y \leq 0. \end{cases}$$

Resultat principal

Les primeres constants de Lyapunov són:

$$V_1 = V_2 = 0, \quad V_5 = \frac{5\pi}{16}(a_5 + b_5),$$

$$V_3 = \frac{3\pi}{8}(a_3 + b_3), \quad V_6 = \frac{26}{21}a_5(a_2 + b_2) + \frac{58}{525}a_3(a_4 + b_4),$$

$$V_4 = \frac{14}{15}a_3(a_2 + b_2), \quad V_7 = \frac{35\pi}{128}(a_7 + b_7).$$

Idea de la prova. De

$$\frac{dr}{d\theta} = \sum_{k \geq 2} R_k(\theta), \Rightarrow r(\theta; \rho) = \sum_{k \geq 2} u_k(\theta) \rho^k.$$

Inspirat en [GasGuill95], calculam les primeres funcions $u_k(\theta)$.

Composam les aplicacions de retorn o de Poincaré:

(f) entre 0 i π , i (g) entre π i 2π . Per exemple,

$$f(\rho) = \rho + \sum_{i \geq 2} u_i(\pi) \rho^i.$$

Usant la notació: $\tilde{f}(\theta) = \int_0^\theta f(s) ds$ obtenim

$$\begin{aligned}
 u_2(\theta) &= \tilde{R}_2, \\
 u_3(\theta) &= (\tilde{R}_2)^2 + \tilde{R}_3, \\
 u_4(\theta) &= (\tilde{R}_2)^3 + 2\tilde{R}_2\tilde{R}_3 + \tilde{R}_2\tilde{R}_3 + \tilde{R}_4, \\
 u_5(\theta) &= (\tilde{R}_2)^4 + 3(\tilde{R}_2)^2\tilde{R}_3 + (\tilde{R}_2)^2\tilde{R}_3 + 2\tilde{R}_2\tilde{R}_2\tilde{R}_3 + \frac{3}{2}(\tilde{R}_3)^2 \\
 &\quad + 2\tilde{R}_2\tilde{R}_4 + 2\tilde{R}_4\tilde{R}_2 + \tilde{R}_5, \\
 u_6(\theta) &= \tilde{R}_6 + 3\tilde{R}_5\tilde{R}_2 + 2\tilde{R}_2\tilde{R}_5 + \tilde{R}_4\tilde{R}_3 + 3\tilde{R}_3\tilde{R}_4 + 4\tilde{R}_2\tilde{R}_4\tilde{R}_2 \\
 &\quad + 3\tilde{R}_4(\tilde{R}_2)^2 + 3\{R_4(\tilde{R}_2)^2\} + \{R_3\tilde{R}_2\tilde{R}_3\} + 3\tilde{R}_3\tilde{R}_3\tilde{R}_2 \\
 &\quad + 4(\tilde{R}_3)^2\tilde{R}_2 + 2\tilde{R}_2\{R_3(\tilde{R}_2)^2\} + 4\tilde{R}_3(\tilde{R}_2)^3 + 3(\tilde{R}_2)^2\tilde{R}_3\tilde{R}_2 \\
 &\quad + \{\tilde{R}_3(\tilde{R}_2)^3\} + (\tilde{R}_2)^5, \\
 u_7(\theta) &= \tilde{R}_7 + 2\tilde{R}_6\tilde{R}_2 + 4\tilde{R}_6\tilde{R}_2 + 3\tilde{R}_5\tilde{R}_3 + 2\tilde{R}_5\tilde{R}_3 + 3\tilde{R}_5(\tilde{R}_2)^2 \\
 &\quad + 6\tilde{R}_2\tilde{R}_5\tilde{R}_2 + 6\{R_5(\tilde{R}_2)^2\} + 4\tilde{R}_4\tilde{R}_3\tilde{R}_2 + 2(\tilde{R}_4)^2 \\
 &\quad + 2\tilde{R}_2\tilde{R}_4\tilde{R}_3 + 6\tilde{R}_3\tilde{R}_4\tilde{R}_2 + 8\tilde{R}_2\tilde{R}_3\tilde{R}_4 + 4\{R_4\tilde{R}_3\tilde{R}_2\} \\
 &\quad + 4\tilde{R}_4(\tilde{R}_2)^3 + 6\tilde{R}_2\{R_4(\tilde{R}_2)^2\} + 6(\tilde{R}_2)^2\tilde{R}_4\tilde{R}_2 \\
 &\quad + 4\{R_4(\tilde{R}_2)^3\} + 5/2(\tilde{R}_3)^3 + 3\tilde{R}_3\{R_3(\tilde{R}_2)^2\} \\
 &\quad + 15/2(\tilde{R}_3)^2(\tilde{R}_2)^2 + 2(R_3\tilde{R}_2)^2 + 2\tilde{R}_2\{R_3\tilde{R}_3\tilde{R}_2\} \\
 &\quad + 8\tilde{R}_2\tilde{R}_3\tilde{R}_3\tilde{R}_2 + 2\{R_3\tilde{R}_3(\tilde{R}_2)^2\} + 5\tilde{R}_3(\tilde{R}_2)^4 \\
 &\quad + 3(\tilde{R}_2)^2\{R_3(\tilde{R}_2)^2\} + 4(\tilde{R}_2)^3\tilde{R}_3\tilde{R}_2 + 2\tilde{R}_2\{R_3(\tilde{R}_2)^3\} \\
 &\quad + \{R_3(\tilde{R}_2)^4\} + (\tilde{R}_2)^6.
 \end{aligned}$$

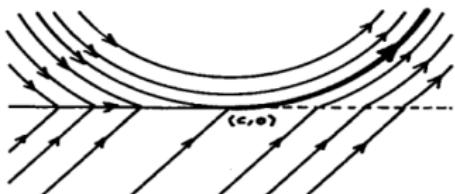
Nota: El mètode usat requereix un munt de càculs tediosos i, pensam, que aquest no és el camí adequat.

- ▶ “Limit cycles for non-smooth differential equations via Schwarzian derivative”. Journal of Differential Equations (1996).

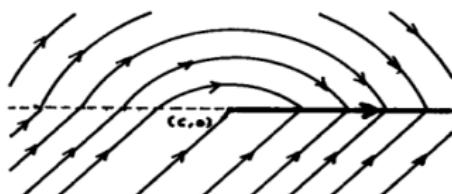
Objectiu: Considerem una classe de sistemes diferencials polinomials discontinus al pla. Fitar el nombre de cicles límit.

$$(\dot{x}, \dot{y}) = \begin{cases} (P^+(x, y), Q^+(x, y)) & \text{si } y \geq 0, \\ (P^-(x, y), Q^-(x, y)) & \text{si } y \leq 0. \end{cases}$$

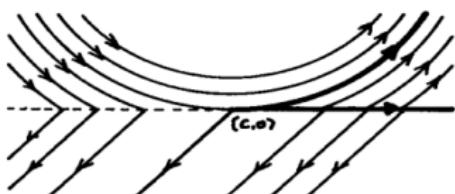
Per a aquest tipus d'equacions diferencials, cal revisar i redefinir el concepte de solució.



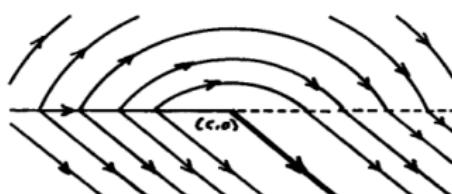
1. $P^+(p) > 0, Q^-(p) > 0, (x-c), Q^+(x,o) > 0$



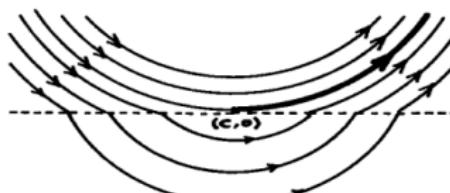
2. $P^+(p) > 0, Q^-(p) > 0, (x-c), Q^+(x,o) < 0$



3. $P^+(p) > 0, Q^-(p) < 0, (x-c), Q^+(x,o) > 0$



4. $P^+(p) > 0, Q^-(p) < 0, (x-c), Q^+(x,o) < 0$



5. $Q^-(p) = Q^+(p) = 0, P^+(p) > 0, P^-(p) > 0$

q és punt singular $\Leftrightarrow q \in \{y = 0\}$ i o bé $Q^-(q)Q^+(q) = 0$ o bé
 $((P^+Q^- - P^-Q^+)/ (Q^- - Q^+))(q) = 0$.

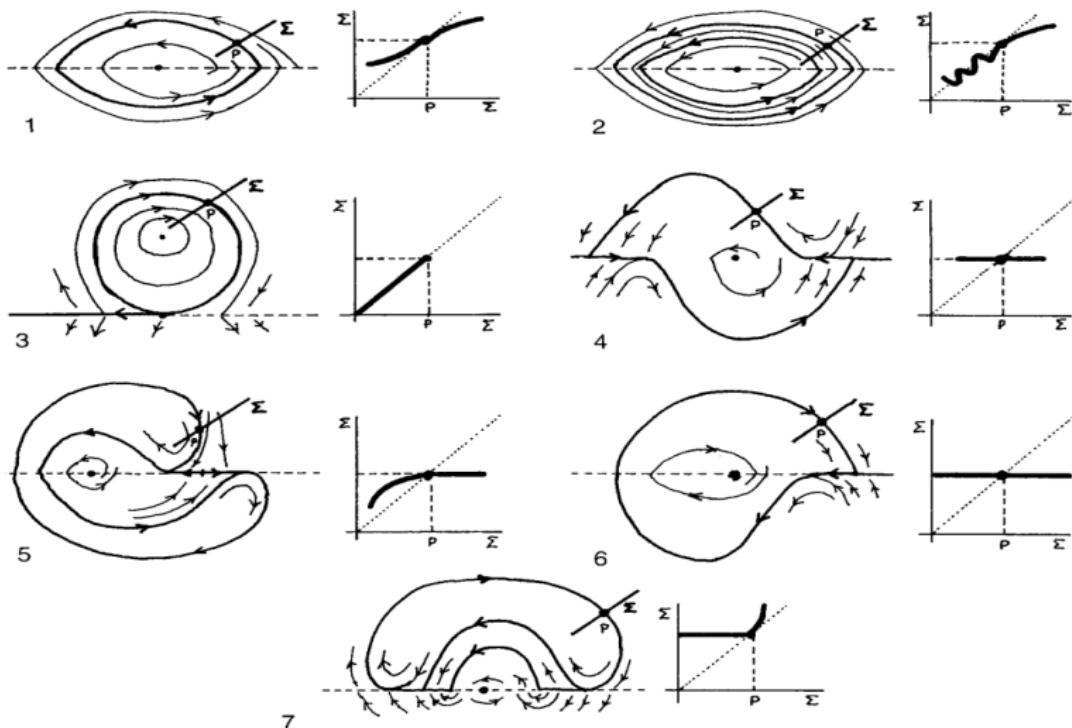


Figure: Alguns exemples de cicles límit: regulars i singulars

Resultat principal

El sistema té:

- ▶ o bé té un cicle límit singular que és una corba no simple
- ▶ o bé, com a màxim, té quatre cicles límit singulars simples

A més, en el segon cas, com a màxim dos d'aquests cicles límit singulars envolten l'origen.

Idea de la prova. Part de la prova es base en l'estudi de la derivada Schwarziana

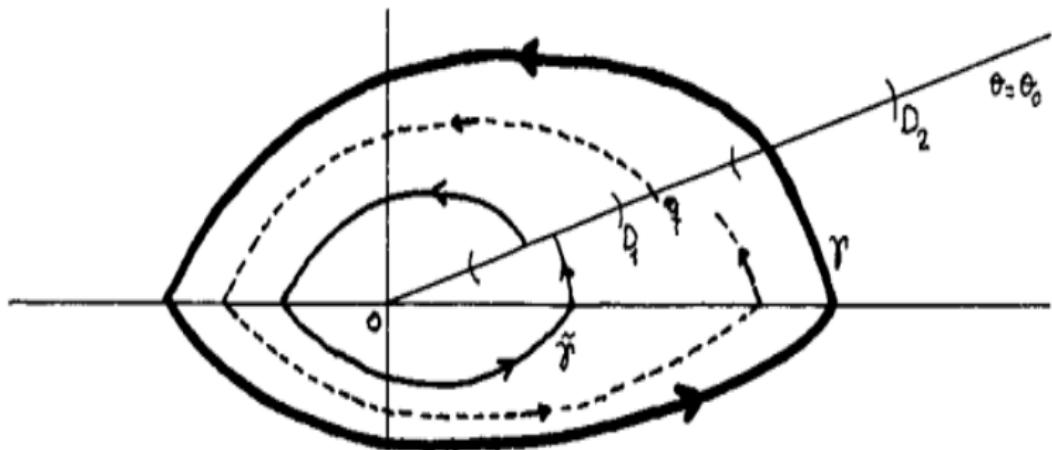
$$\mathcal{D}(h) = \frac{h'''}{h'} - \frac{3}{2} \left(\frac{h''}{h'} \right)^2,$$

de l'aplicació de Poincaré, h , en lloc de l'estudi de la derivada usual de l'aplicació de retorn.

Usam la derivada Schwarziana per a fixar la multiplicitat dels cicles límit:

$\mathcal{D}(h) < 0$ (resp. $\mathcal{D}(h) > 0$) i f monòtona

$\Rightarrow |f'|$ no té mínims (resp. màxims) positius locals



- ▶ “The center problem for discontinuous Liénard differential equation”. International Journal of Bifurcations and Chaos (1999).

Per a equacions diferencials donades per un camp vectorial amb una recta de discontinuïtats,

$$(\dot{x}, \dot{y}) = \begin{cases} (-y + P^+(x, y), x + Q^+(x, y)) & \text{si } y \geq 0, \\ (-y + P^-(x, y), x + Q^-(x, y)) & \text{si } y \leq 0. \end{cases}$$

on $P^\pm, Q^\pm \in \mathcal{C}^\omega(\mathbb{R})$.

Resultats

- ▶ Es prova que les constants de Lyapunov són polinomis quasi-homogenis en les variables donades pels coeficients de l'equació diferencial.
- ▶ Obtenim l'expressió general de les constants de Lyapunov per a dues famílies d'equacions diferencials Liénard discontinues, mòdul alguns coeficients.
 1. Família $\{x = 0\}$: aquests coeficients es determinen i es resol el problema del centre.
 2. Família $\{y = 0\}$: el problema del centre es resol, si els coeficients són no nuls.



- ▶ “The center problem for discontinuous Liénard differential equation”. International Journal of Bifurcations and Chaos (1999).

Per a equacions diferencials donades per un camp vectorial amb una recta de discontinuïtats,

$$(\dot{x}, \dot{y}) = \begin{cases} (-y + P^+(x, y), x + Q^+(x, y)) & \text{si } y \geq 0, \\ (-y + P^-(x, y), x + Q^-(x, y)) & \text{si } y \leq 0. \end{cases}$$

on $P^\pm, Q^\pm \in \mathcal{C}^\omega(\mathbb{R})$.

Resultats

- ▶ Es prova que les constants de Lyapunov són polinomis quasi-homogenis en les variables donades pels coeficients de l'equació diferencial.
- ▶ Obtenim l'expressió general de les constants de Lyapunov per a dues famílies d'equacions diferencials Liénard discontinues, mòdul alguns coeficients.
 1. Família $\{x = 0\}$: aquests coeficients es determinen i es resol el problema del centre.
 2. Família $\{y = 0\}$: el problema del centre es resol, si els coeficients són no nuls.



- ▶ “The center problem for discontinuous Liénard differential equation”. International Journal of Bifurcations and Chaos (1999).

Per a equacions diferencials donades per un camp vectorial amb una recta de discontinuïtats,

$$(\dot{x}, \dot{y}) = \begin{cases} (-y + P^+(x, y), x + Q^+(x, y)) & \text{si } y \geq 0, \\ (-y + P^-(x, y), x + Q^-(x, y)) & \text{si } y \leq 0. \end{cases}$$

on $P^\pm, Q^\pm \in \mathcal{C}^\omega(\mathbb{R})$.

Resultats

- ▶ Es prova que les constants de Lyapunov són polinomis quasi-homogenis en les variables donades pels coeficients de l'equació diferencial.
- ▶ Obtenim l'expressió general de les constants de Lyapunov per a dues famílies d'equacions diferencials Liénard discontinues, mòdul alguns coeficients.
 1. Família $\{x = 0\}$: aquests coeficients es determinen i es resol el problema del centre.
 2. Família $\{y = 0\}$: el problema del centre es resol, si els coeficients són no nuls.



- ▶ “The center problem for discontinuous Liénard differential equation”. International Journal of Bifurcations and Chaos (1999).

Per a equacions diferencials donades per un camp vectorial amb una recta de discontinuïtats,

$$(\dot{x}, \dot{y}) = \begin{cases} (-y + P^+(x, y), x + Q^+(x, y)) & \text{si } y \geq 0, \\ (-y + P^-(x, y), x + Q^-(x, y)) & \text{si } y \leq 0. \end{cases}$$

on $P^\pm, Q^\pm \in \mathcal{C}^\omega(\mathbb{R})$.

Resultats

- ▶ Es prova que les constants de Lyapunov són polinomis quasi-homogenis en les variables donades pels coeficients de l'equació diferencial.
- ▶ Obtenim l'expressió general de les constants de Lyapunov per a dues famílies d'equacions diferencials Liénard discontinues, mòdul alguns coeficients.
 1. Família $\{x = 0\}$: aquests coeficients es determinen i es resol el problema del centre.
 2. Família $\{y = 0\}$: el problema del centre es resol, si els coeficients són no nuls.



Idea de la prova. Inspirat en [Cima *et al.*, 1997] en el cas diferenciable usant les propietats algebraiques de les constants de Lyapunov.

S'aplica a les equacions diferencials de Liénard discontínues:

$$(\dot{x}, \dot{y}) = \begin{cases} (-y + f^+(x), x) & \text{si } x \geq 0, \\ (-y + f^-(x), x) & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

i

$$(\dot{x}, \dot{y}) = \begin{cases} (-y + f^+(x), x) & \text{si } y \geq 0, \\ (-y + f^-(x), x) & \text{si } y \leq 0. \end{cases}$$

- ▶ “Center-focus and isochronous center problems for discontinuous differential equations”. Discrete and Continuous Dynamical Systems (2000).

Per a equacions

$$(1) \quad \dot{z} = \begin{cases} F_1(z, \bar{z}) & \text{si } \operatorname{Im}(z) \geq 0, \\ F_2(z, \bar{z}) & \text{si } \operatorname{Im}(z) \leq 0, \end{cases} \quad (1.1),$$

on F_i són funcions analítiques complexes a prop de zero.

Objectiu: estudiar el problema centre-focus i la isocronia relacionant l'ordre de degeneració del punt d'equilibri amb l'ordre de degeneració d'aquest punt per a cada una de les components diferenciables. Una aproximació teòrica i geomètrica.

Definim

- ▶ $\Pi(\rho) = r(2\pi; \rho)$ l'aplicació de retorn completa, i.e.

$$r(2\pi; \rho) = r_2(2\pi; r_1(\pi; \rho)).$$

- ▶ T la funció de període

$$T : (0, \alpha) \subset \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

temps necessari pel flux per a tornar a tallar \mathbb{R}^+ .

Definition 1

$(0, 0)$ és un punt (m, k) monodròmic, si i

$$\begin{aligned}\Pi(\rho) - \rho &= O(m), \\ T(\rho) - 2\pi &= O(k).\end{aligned}$$

Si $m = \infty$, aleshores $(0, 0)$ és un centre.

Teorema

- ▶ Si, a l'origen, l'eq. (1) té un punt $(m, *)$ monodròmic i l'eq. (1.1) té un punt $(n, *)$ monodròmic, aleshores, l'eq. (1.2) té un punt $(\tilde{m}, *)$ monodròmic, $\tilde{m} = \min(m, n)$.
- ▶ Si, a l'origen, l'eq. (1) té un punt (∞, k) monodròmic i l'eq. (1.1) té un punt (n, l) monodròmic, aleshores, l'eq. (1.2) té un punt (n, \tilde{k}) monodròmic, $\tilde{k} \geq \min(k, l)$.

Teorema

- ▶ Si, a l'origen, l'eq. (1) té un punt $(m, *)$ monodròmic i l'eq. (1.1) té un punt $(n, *)$ monodròmic, aleshores, l'eq. (1.2) té un punt $(\tilde{m}, *)$ monodròmic, $\tilde{m} = \min(m, n)$.
- ▶ Si, a l'origen, l'eq. (1) té un punt (∞, k) monodròmic i l'eq. (1.1) té un punt (n, l) monodròmic, aleshores, l'eq. (1.2) té un punt (n, \tilde{k}) monodròmic, $\tilde{k} \geq \min(k, l)$.

- ▶ “**Degenerate Hopf bifurcations in discontinuous planar systems**”. Journal of Mathematical Analysis and Applications (2001).

Per a equacions

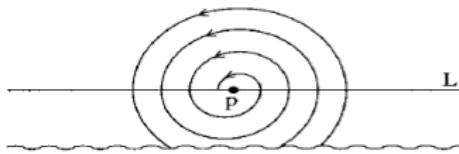
$$(\dot{x}, \dot{y}) = \begin{cases} (X^+(x, y), Y^+(x, y)) & \text{si } y \geq 0, \\ (X^-(x, y), Y^-(x, y)) & \text{si } y \leq 0. \end{cases}$$

on $X^\pm, Y^\pm \in \mathcal{C}^\omega(\mathbb{R})$ en un entorn de zero.

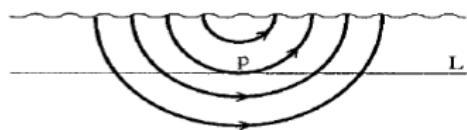
Objectiu: usant coordenades polars generalitzades, estudiar l'estabilitat i els cicles límit,

- ▶ Obtenim les tres primeres “constants de Lyapunov”.
- ▶ Per a algunes famílies, usant aquestes noves constants, obtenim cicles límit.

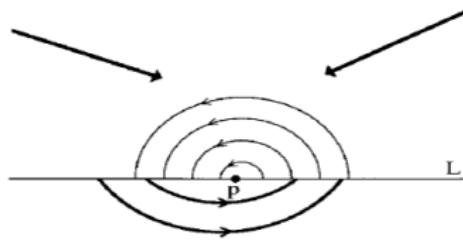
Pseudo-focus: punts el flux al voltant dels quals gira [Filippov, 1988]:
 Focus-focus, focus-parabòlic, parabòlic-parabòlic



Upper plane: p is of focus type



Lower plane: p has a parabolic contact



Discontinuous system: p is of focus-parabolic type

Idea per a determinar l'estabilitat d'un punt singular p:
a partir de $(r_0, 0)$, $r_0 \gtrsim 0$ avaluar el signe del primer terme no zero de

$$h^-(h^+(r_0)) - r_0 = V_k r_0^k + O(r_0^{k+1}).$$

en la seva r -potència de la sèrie, on $k \in \mathbb{N}$ no és necessàriament senar

- ▶ **al cas smooth:** la dificultat apareix en la longitud de les expressions. Apareixen algunes cancel·lacions pel fet que el flux dóna un gir complet.
- ▶ **al cas discontinu:** expressions més llargues que en el cas smooth per que només consideram mitges voltes i no es tenen cancel·lacions. Pot passar que no es tengui analiticitat (contacte parabòlic).

Per exemple,

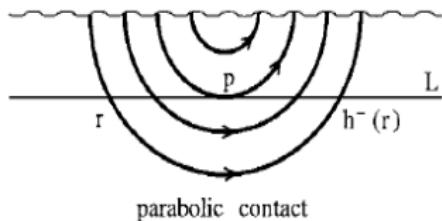
Idea per a determinar l'estabilitat d'un punt singular p:
 a partir de $(r_0, 0)$, $r_0 \gtrsim 0$ avaluar el signe del primer terme no zero de

$$h^-(h^+(r_0)) - r_0 = V_k r_0^k + O(r_0^{k+1}).$$

en la seva r -potència de la sèrie, on $k \in \mathbb{N}$ no és necessàriament senar

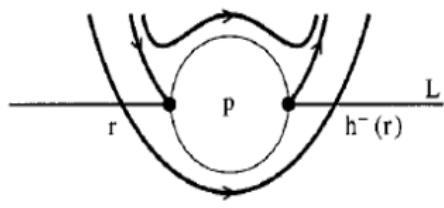
- ▶ **al cas smooth:** la dificultat apareix en la longitud de les expressions. Apareixen algunes cancel·lacions pel fet que el flux dóna un gir complet.
- ▶ **al cas discontinu:** expressions més llargues que en el cas smooth per que només consideram mitges voltes i no es tenen cancel·lacions. Pot passar que no es tengui analiticitat (contacte parabòlic).

Per exemple,

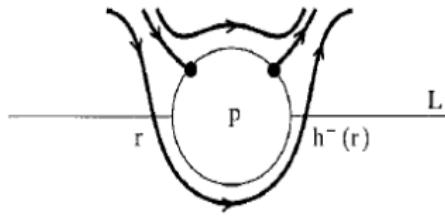


polar blow-up

quasihomogeneous blow-up



Is $h^-(r)$ analytic?



$h^-(r)$ is analytic

- ▶ “Simple non-autonomous differential equations with many limit cycles”. Communications on Applied Nonlinear Analysis (2008).

Per a equacions

$$\frac{dx}{dt} = S(t, x),$$

diferencials no autònomes definides sobre el cilindre $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$,

Objectiu: saber si, hi ha alguna família de funcions $S(t, x)$ per a la qual l'equació no té cota superior del nombre de cicles límit.

Teorema

Si

$$S(t, x) = a(t) + b(t) |x|,$$

on $a(t)$ i $b(t)$ són funcions diferenciables, reals i 1-periòdiques; aleshores

no hi ha cota superior pel nombre de cicles límit

- ▶ “Simple non-autonomous differential equations with many limit cycles”. Communications on Applied Nonlinear Analysis (2008).

Per a equacions

$$\frac{dx}{dt} = S(t, x),$$

diferencials no autònomes definides sobre el cilindre $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$,

Objectiu: saber si, hi ha alguna família de funcions $S(t, x)$ per a la qual l'equació no té cota superior del nombre de cicles límit.

Teorema

Si

$$S(t, x) = a(t) + b(t) |x|,$$

on $a(t)$ i $b(t)$ són funcions diferenciables, reals i 1-periòdiques; aleshores

no hi ha cota superior pel nombre de cicles límit

Idea de la prova: provam que, per a cada $m \in \mathbb{N}$, existeix una equació amb m cicles límit al manco.

Al casos: $m = 1, 2$

$$\frac{dx}{dt} = |x|, \quad \frac{dx}{dt} = |x| - 1.$$

Si $m \geq 2$, i per a $\varepsilon \gtrsim 0$, l'equació

$$\frac{dx}{dt} = 2\pi \sin(2\pi t) + \varepsilon \cos(2m\pi t) |x|$$

té $m - 2$ cicles límit.

Noti's que: si $\varepsilon = 0 \Rightarrow$ continu d'o.p.

Qüestió: quantes d'elles queden després de pertorbar?

Tenim existència i unicitat de solucitat, però no podem aplicar les tècniques habituals de la teoria de bifurcacions (equacions variacionals de primer ordre respecte ε).

Inspirats en el mètode de l'*averaging*, l'expressió integral de l'edo és

$$\varphi_\varepsilon(t, \rho) = \rho + \int_0^t (2\pi \sin(2\pi s) + \varepsilon \cos(2\pi ms) |\varphi_\varepsilon(s, \rho)|) ds$$

i les o.p. es corresponen amb c.i. ρ tals que

$$W_m(\rho, \varepsilon) = \frac{\varphi_\varepsilon(1, \rho) - \rho}{\varepsilon} = 0.$$

gràficament

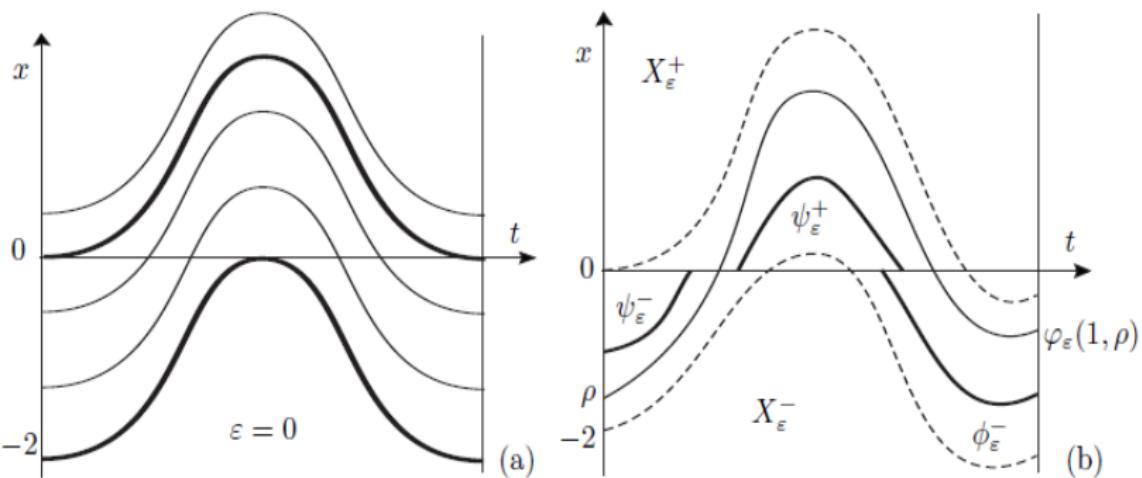


Figure 2: (a) Solutions of equation (3) when $\varepsilon = 0$. The thick lines correspond with the solutions starting at $\rho = -2$ and $\rho = 0$.
 (b) The map $\varphi_\varepsilon(1, \rho)$ as a composition of three analytic maps.

Gràcies per la vostra atenció

Per acabar, unes imatges dedicades a n'En Tomeu,

Gràcies per la vostra atenció

Per acabar, unes imatges dedicades a n'En Tomeu,

2008, Helsinki



2006, Xina



1997, Lleida

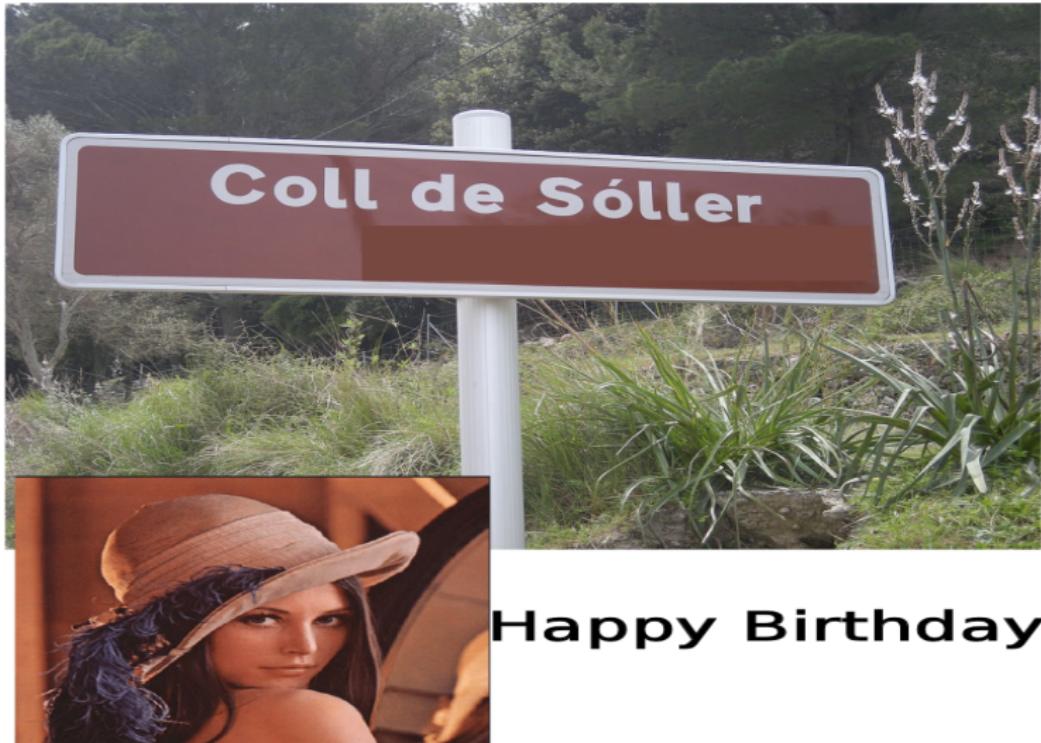


**Winter School - DS - Lleida - desembre, 1997
On és en Tomeu ?**

1997, Lleida



Per molts d'anys !



Happy Birthday